EJERCICIOS PROPUESTOS

CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

4-Octubre-2007 (VARIABLE COMPLEJA/EjAMII/EjerPrII1.tex)

Capítulo 1.

Números complejos. Funciones complejas elementales.

pp. 1 - 74

1.2.6. Ejercicios Propuestos (pp. 17-20)

Ejerc. 1 - 24

Ejercicio Propuesto 14.
Justifica que si $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *son números complejos de módulo* 1 *tales que*

$$| z_1 + z_2 + \cdots + z_n |= n,$$

entonces se verifica que todos son iguales $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$.

Solución.
Por inducción sobre n.

Vamos a demostrarlo para $n = 2$. Supongamos que z_1 y z_2 son números complejos tales que $| z_1 |=| z_2 |= 1$ y $| z_1 + z_2 |= 2$. Por la igualdad del paralelogramo tenemos que

$$| z_1 + z_2 |^2 + | z_1 - z_2 |^2= 2(| z_1 |^2 + | z_2 |^2),$$

luego

$$2^2 + | z_1 - z_2 |^2= 2(1^2 + 1^2),$$

esto es

$$4+ | z_1 - z_2 |^2= 4,$$

de donde se sigue que

$$| z_1 - z_2 |^2= 0,$$

y por tanto $z_1 = z_2$.

Ahora, supongamos el enunciado válido para n y demostrémoslo para $n + 1$. Supongamos que $z_1, z_2, \cdots z_n, z_{n+1}$ son números complejos tales que $| z_1 |=| z_2 |= \cdots =| z_n |=| z_{n+1} |= 1$ y $| z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1} |= n + 1$. Puesto que

$$n =| z_1 | + | z_2 | + \cdots + | z_n |\geq| z_1 + z_2 + \cdots + z_n |=$$

$$| z_1 + z_2 + \cdots z_n + z_{n+1} - z_{n+1} |\geq| z_1 + z_2 + \cdots z_n + z_{n+1} | - | z_{n+1} |=$$

$$n + 1 - 1 = n,$$

se sigue que

$$| z_1 + z_2 + \cdots + z_n |= n,$$

y por tanto, por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n.$$

Cambiando los papeles de z_1 y z_{n+1} se obtiene que

$$z_2 = z_3 = \cdots = z_{n+1}.$$

En conclusión,

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z_{n+1}.$$

■

Ejercicio Propuesto 15.
Estudia para cada una de las siguientes igualdades si hay algún $z \in \mathbb{C}$ con $\mid z \mid= 1$ que la verifique

(a) $\mid z^3 + z^2 + 1 \mid= 3$

(b) $\mid z^4 - 2z - i \mid= 4$

(c) $\mid z^6 + z^3 + 2 \mid= 4+ \mid 4 + 4z^2 \mid$

Solución.

(a) Si $z \in \mathbb{C}$ con $\mid z \mid= 1$ verifica la igualdad $\mid z^3 + z^2 + 1 \mid= 3$, entonces por el ejercicio anterior deducimos que $z^3 = z^2 = 1$, luego $z = 1$. Finalmente, es claro que $z = 1$ satisface la igualdad $\mid z^3 + z^2 + 1 \mid= 3$.

(b) Si $z \in \mathbb{C}$ con $\mid z \mid= 1$ verifica la igualdad $\mid z^4 - 2z - i \mid= 4$, entonces por el ejercicio anterior deducimos que $z^4 = -z = -z = -i$. Nótese que $-z = -i$ implica que $z^4 = 1$, lo que contradice la igualdad $z^4 = -i$. Luego, no existen $z \in \mathbb{C}$ con $\mid z \mid= 1$ que verifiquen la igualdad $\mid z^4 - 2z - i \mid= 4$.

(c) Supongamos que $z \in \mathbb{C}$ con $\mid z \mid= 1$ verifica la igualdad $\mid z^6 + z^3 + 2 \mid= 4+ \mid 4 + 4z^2 \mid$. Puesto que

$$4 =\mid z \mid^6 + \mid z \mid^3 +2 \geq\mid z^6 + z^3 + 2 \mid= 4+ \mid 4 + 4z^2 \mid,$$

se sigue que

$$\mid 4 + 4z^2 \mid= 0 \quad \text{y} \quad \mid z^6 + z^3 + 2 \mid= 4.$$

Ahora bien, $\mid 4 + 4z^2 \mid= 0$ implica que $\mid 1 + z^2 \mid= 0$, luego $z^2 = -1$, y por tanto $z^6 = -1$. Por otra parte, teniendo en cuenta el ejercicio anterior,

$| z^6 + z^3 + 2 | = 4$ implica $z^6 = z^3 = 1 = 1$. Esta contradicción pone de manifiesto que no existen $z \in \mathbb{C}$ con $| z | = 1$ que verifiquen la igualdad $| z^6 + z^3 + 2 | = 4 + | 4 + 4z^2 |$.

$\blacksquare$

Ejercicio Propuesto 21.
Resuelve la ecuación

$$(z-1)^n = (z+1)^n$$

donde $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$

Solución.
Nótese que $z = -1$ no es solución de la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, y por tanto dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

Puesto que sabemos que las raices n-ésimas de la unidad son

$$1, u, u^2, \cdots, u^{n-1}$$

donde

$$u = cos\frac{2\pi}{n} + i\, sen\frac{2\pi}{n},$$

se sigue que la ecuación anterior es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\frac{z-1}{z+1} = u^k \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Ahora bien, nótese que la ecuación $\frac{z-1}{z+1} = 1$ no tiene solución. Por tanto nuestra ecuación es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\frac{z-1}{z+1} = u^k \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Despejando z se encuentran las soluciones

$$z_k = \frac{1+u^k}{1-u^k} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador obtenemos que

$$z_k = \frac{(1+u^k)(1-\overline{u^k})}{(1-u^k)(1-\overline{u^k})} = \frac{1- \mid u^k \mid^2 + u^k - \overline{u^k}}{(1+ \mid u^k \mid^2 - u^k + \overline{u^k}} =$$

$$\frac{2i\,Im(u^k)}{2(1-Re(u^k))} = i\,\frac{Im(u^k)}{1-Re(u^k)} = i\,\frac{sen\frac{2k\pi}{n}}{1-cos\frac{2k\pi}{n}}.$$

NOTA: La ecuación del enunciado es polinómica de grado $\leq n$. Nótese que por el binomio de Newton

$$(z-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k z^{n-k} \quad \text{y} \quad (z+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z^{n-k},$$

y por tanto la ecuación del enunciado es del tipo

$$2nz^{n-1} + \cdots = 0,$$

luego una ecuación polinómica de grado $n-1$, y por el Teorema fundamental del álgebra tiene $n-1$ soluciones, que son las que hemos calculado.

■

1.3.4. Ejercicios Propuestos (pp. 29-30)

Ejerc. 25 - 33

1.4.6. Ejercicios Propuestos (pp. 39-40)

Ejerc. 34 - 40

1.5.5. Ejercicios Propuestos (p. 52-54)

Ejerc. 41 - 58

Ejercicio Propuesto 47. (Criterio General de Dirichlet)
Sean Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

i) La sucesión $\{F_n\}$ de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ está uniformemente acotada en A.

ii) La serie $\sum \mid g_n - g_{n+1} \mid$ converge uniformemente en A.

iii) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en A.

Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A.

Solución.
Empecemos probando una fórmula de sumación por partes. Dados dos naturales n y p se tiene que

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}\, g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (F_{n+k} - F_{n+k-1})\, g_{n+k} =$$

$$\sum_{k=1}^{p} F_{n+k}\, g_{n+k} - \sum_{k=1}^{p} F_{n+k-1}\, g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}\, g_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} F_{n+k}\, g_{n+k+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{p} F_{n+k}\, g_{n+k} - \sum_{k=0}^{p} F_{n+k}\, g_{n+k+1} + F_{n+p}\, g_{n+p+1} =$$

$$-F_n\, g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}\, (g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F_{n+p}\, g_{n+p+1}.$$

Por i) sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$\mid F_n(a) \mid \leq M, \qquad \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De la fórmula de sumación por partes se sigue que para todo $a \in A$ se verifica que

$$\left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(a)\, g_{n+k}(a) \right| = \mid -F_n(a)\, g_{n+1}(a) +$$

$$\sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(a)\, (g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a)) + F_{n+p}(a)\, g_{n+p+1}(a) \Bigg| \leq$$

$$| F_n(a) || g_{n+1}(a) | + \sum_{k=1}^{p} | F_{n+k}(a) || g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | +$$
$$| F_{n+p}(a) || g_{n+p+1}(a) | \leq$$

$$M | g_{n+1}(a) | + M \sum_{k=1}^{p} | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | + M | g_{n+p+1}(a) | =$$
$$M \left(| g_{n+1}(a) | + \sum_{k=1}^{p} | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | + | g_{n+p+1}(a) | \right).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por ii) la serie $\sum | g_n - g_{n+1} |$ converge uniformemente en A, y por tanto verifica la condición de Cauchy uniforme en A, luego existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera naturales $n \geq m_1$ y p se verifica que

$$\sum_{k=1}^{p} | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad \forall a \in A.$$

Por iii) la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en A, y por tanto existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq m_2$ se verifica que

$$| g_n(a) | < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad \forall a \in A.$$

Finalmente, de la anterior acotación se sigue que para todo natural $n \geq \max\{m_1, m_2\}$ se verifica que

$$\left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(a) g_{n+k}(a) \right| < M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \right) = \varepsilon, \qquad \forall a \in A.$$

Luego la serie $\sum f_n g_n$ verifica la condición de Cauchy uniforme en A, y por tanto converge uniformemente en A.

Casos particulares.

i) Si para cada $x \in \Omega$ la sucesión $\{g_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona, entonces la condición ii) es consecuencia de iii). (Véase la Proposición 1.16)

ii) Si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones constantes en Ω, es decir $\{g_n\} = \{a_n\}$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión monótona convergente a cero de números reales, entonces las condiciones ii) y iii) se verifican trivialmente en todo subconjunto de Ω, obteniéndose así el *Criterio particular de Dirichlet* (Proposición 1.35).

$\blacksquare$

Ejercicio Propuesto 48. (Criterio General de Abel)
Sean Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

i) La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

ii) La sucesión de sumas parciales de la serie $\mid g_1 \mid + \sum_{n\geq 1} \mid g_n - g_{n+1} \mid$ está uniformemente acotada en A.

Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A.

Solución.
Consideremos las funciones $F : A \to \mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n : A \to \mathbb{C}$ definidas por

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{y} \quad F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Teniendo en cuenta la fórmula de sumación por partes, probada en el Criterio General de Dirichlet (Ejercicio propuesto 47), sabemos que para cualesquiera dos naturales n y p se tiene que

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}\, g_{n+k} = -F_n\, g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}\,(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F_{n+p}\, g_{n+p+1},$$

y puesto que trivialmente se verifica que

$$0 = -F\, g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p} F\,(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F\, g_{n+p+1},$$

restando ambas igualdades miembro-a-miembro se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}\, g_{n+k} =$$

$$-(F_n - F)\, g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p} (F_{n+k} - F)(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + (F_{n+p} - F) g_{n+p}.$$

Por ii) sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$| g_1(a) | + \sum_{k=1}^{n} | g_k(a) - g_{k+1}(a) | \leq M, \qquad \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{p} | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | \leq M, \qquad \forall a \in A, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

También, puesto que

$$g_n = g_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

se sigue que

$$| g_n(a) | \leq M, \qquad \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por i) la sucesión $\{F_n\}$ converge uniformemente en A, y por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq m$ se verifica que

$$| F_n(a) - F(a) | < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad \forall a \in A.$$

De la igualdad y de las acotaciones antes probadas deducimos que para cualesquiera naturales $n \geq m$ y p, y para todo $a \in A$ se verifica que

$$\left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(a)\, g_{n+k}(a) \right| = |-(F_n(a) - F(a))\, g_{n+1}(a) +$$

$$\left. \sum_{k=1}^{p} (F_{n+k}(a) - F(a))\, (g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a)) + (F_{n+p}(a) - F(a)) g_{n+p}(a) \right| \leq$$

$$| F_n(a) - F(a) | \, | g_{n+1}(a) | +$$

$$\sum_{k=1}^{p} | F_{n+k}(a) - F(a) | \, | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | + | F_{n+p}(a) - F(a) | \, | g_{n+p}(a) | <$$

$$\frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3M} \left(\sum_{k=1}^{p} | g_{n+k}(a) - g_{n+k+1}(a) | \right) + \frac{\varepsilon}{3M} M \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Luego la serie $\sum f_n g_n$ verifica la condición de Cauchy uniforme en A, y por tanto converge uniformemente en A.

Casos particulares. *Criterio particular de Abel* (Proposición 1.35).

i) Si la serie $\sum f_n$ es una serie de funciones constantes en Ω, es decir $\sum f_n = \sum a_n$, donde $\sum a_n$ es una serie convergente de números complejos, entonces la condición i) se verifica trivialmente en todo subconjunto de Ω.

ii) Si para cada $x \in \Omega$ la sucesión $\{g_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{g_n\}$ está uniformemente acotada en A, entonces se verifica la condición ii). (Véase la Proposición 1.16)

■

Ejercicio Propuesto 49. (Teorema de Picard)
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente a cero. Para cada número $\delta \in]0,1[$, sea

$$A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : | z | \leq 1, \quad | z-1 | \geq \delta\}.$$

Justifica que la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en A_δ. Deduce que dicha serie converge en todo punto de la circunferencia unidad salvo, eventualmente, en el punto 1.

Solución.
Consideremos las sucesiones de funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ definidas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ por

$$f_n(z) = z^n \quad \text{y} \quad g_n(z) = a_n.$$

Como $\{a_n\}$ decrece a cero, se sigue que la sucesión $\{g_n\}$ es decreciente y además converge a cero uniformemente en $\mathbb{C}$, y en particular en A_δ. Notemos además que la serie $\sum f_n$ tiene sucesión de sumas parciales $\{F_n\}$ uniformemente acotada en A_δ ya que

$$| F_n(z) | = \left| \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1+ | z |^{n+1}}{| 1-z |} \leq \frac{2}{\delta}, \quad \forall z \in A_\delta.$$

Por el Criterio de Dirichlet, la serie $\sum f_n g_n = \sum a_n z^n$ converge uniformemente en A_δ.

Finalmente, dado z_0 en la circunferencia unidad con $z_0 \neq 1$, tomando $\delta = \frac{1}{3} \mid z_0 - 1 \mid$, se tiene que $\delta \in]0,1[$ y $z_0 \in A_\delta$. Luego, por la parte anterior, la serie $\sum a_n z_0^n$ converge. Variando z_0 obtenemos que la serie $\sum a_n z^n$ converge en $C(0,1) \backslash \{1\}$.

■

Ejercicio Propuesto 57.
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *para* $z \in D(0,\rho)$ *y supongamos que*

$$| a_1 | > \sum_{n=2}^{\infty} n \mid a_n \mid \rho^{n-1}. \qquad (*)$$

Prueba que f *es inyectiva en el disco* $D(0,\rho)$.

Deduce que una función analítica en un abierto Ω, *cuya derivada no se anula en ningún punto de* Ω, *es localmente inyectiva en* Ω. *¿Puede asegurarse que una tal función es inyectiva en* Ω*?*

Solución.
Sean $z_1, z_2 \in D(0,\rho)$ con $z_1 \neq z_2$. Entonces

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n \right] \right| =$$

$$\left| \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} \right| =$$

$$\left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right) \right| \geq | a_1 | - \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right) \right|.$$

Puesto que

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \left(\sum_{k=0}^{n-1} | z_1 |^{n-k-1} | z_2 |^k \right) \leq$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-k-1} \rho^k \right) = \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | n\rho^{n-1},$$

se sigue que

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq | a_1 | - \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | n\rho^{n-1} > 0,$$

y por tanto $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica cuya derivada no se anula en ningún punto de Ω. Dado $a \in \Omega$, por ser f analítica en Ω, existen $r_a > 0$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sucesión de números complejos tales que

$$D(a, r_a) \subseteq \Omega \quad \text{y} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \forall z \in D(a, r_a).$$

Por el Teorema de derivación sabemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

para todo $z \in D(a, r_a)$, y por tanto $f'(a) = a_1 \neq 0$. Puesto que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tiene mismo radio de convergencia que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$, podemos considerar la función $g : D(0, r_a) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in D(0, r_a).$$

Nótese que $f(z) = g(z-a)$ para todo $z \in D(a, r_a)$, y por tanto, si g es inyectiva en conveniente disco $D(0, \rho)$, también f es inyectiva en el disco $D(a, \rho)$.

Puesto que las series de potencias $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n z^n$, y su serie derivada formal $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, tienen mismo radio de convergencia, y puesto que la serie $\sum_{n\geq 2} n \mid a_n \mid z^{n-1}$ tiene mismo radio de convergencia que las anteriores, podemos considerar la función $h : D(0, r_a) \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n \mid a_n \mid z^n, \quad \forall z \in D(0, r_a).$$

Puesto que h es continua y $h(0) = 0$, de la $\varepsilon - \delta$ caracterización de la continuidad, se sigue que existe ρ con $0 < \rho < r_a$ tal que

$$\mid h(z) \mid < \mid a_1 \mid, \quad \forall z \in \overline{D}(0, \rho).$$

En particular, $h(\rho) < \mid a_1 \mid$, esto es

$$\mid a_1 \mid > \sum_{n=2}^{\infty} n \mid a_n \mid \rho^{n-1}.$$

Ahora, por la primera parte del ejercicio tenemos que g es inyectiva en $D(0, \rho)$, y por tanto f es inyectiva en el disco $D(a, \rho)$.

Finalmente, una función analítica en Ω, cuya derivada no se anula en ningún punto de Ω, no tiene por que ser inyectiva. Así, por ejemplo, la función exponencial es analítica en $\mathbb{C}$, su derivada (es ella misma) no se anula en ningún punto, y sin embargo no es inyectiva, ya que es periódica de periodo $2\pi i$.

NOTA. La hipótesis (*) en el enunciado se puede debilitar. A saber, basta exigir únicamente que

$$| a_1 | \geq \sum_{n=2}^{\infty} n \mid a_n \mid \rho^{n-1} \quad \text{y} \quad \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \neq \emptyset.$$

En efecto, dados $z_1, z_2 \in D(0, \rho)$ con $z_1 \neq z_2$, razonando como antes llegamos a que

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq | a_1 | - \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right) \right|.$$

Si $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$, entonces $a_1 \neq 0$ y de lo anterior obtenemos que

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq | a_1 | > 0.$$

Supongamos que algún $a_n \neq 0$ con $n \geq 2$. Puesto que

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \left(\sum_{k=0}^{n-1} | z_1 |^{n-k-1} | z_2 |^k \right) <$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-k-1} \rho^k \right) = \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | n \rho^{n-1},$$

se sigue que

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > | a_1 | - \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | n \rho^{n-1} \geq 0.$$

Resumiendo, en cualquier caso tenemos que

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > 0,$$

y por tanto $f(z_1) \neq f(z_2)$.

■

1.6.7. Ejercicios Propuestos (pp. 72-74)

Ejerc. 59 - 78

Ejercicio Propuesto 68.
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando la condición

$$f(z+w) = f(z)f(w), \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}. \qquad (*)$$

i) Probar que si f es derivable en un punto, entonces f es entera.

ii) Encontrar todas las funciones enteras que verifican la condición (*).

iii) Dar un ejemplo de una función que verifique la condición (*) y que no sea entera.

Solución.
i) Supongamos que f es derivable en $a \in \mathbb{C}$. Dado $b \in \mathbb{C}$, notemos que por (*) se verifica que

$$f(z) = f(z+a-b)f(b-a), \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (**)$$

Puesto que la función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $p(z) = z + a - b$ es derivable en b con $p'(b) = 1$ y $p(b) = a$, se sigue de (**) y de la regla de la cadena que f es derivable en b y que $f'(b) = f'(a)f(b-a)$. En consecuencia, f es entera y

$$f'(z) = f'(a)f(z-a), \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (***)$$

ii) De la condición (*) se sigue que

$$f(z) = f(z)f(0), \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad (****)$$

y en particular $f(0) = f(0)^2$. En consecuencia, o bien $f(0) = 0$ o bien $f(0) = 1$. En el caso en que $f(0) = 0$, se sigue de (****) que $f = 0$. Supongamos que $f(0) = 1$. Puesto que por (***) se tiene que

$$f'(z) = f'(0)f(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

se sigue que la función entera h definida por $h(z) = f(z)e^{-f'(0)z}$ tiene derivada nula. Puesto que $h(0) = 1$, se sigue que $h(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$, y por tanto

$$f(z) = e^{f'(0)z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia, las funciones enteras que verifican la condición (*) son la función idénticamente nula y las funciones de la forma $e^{\alpha z}$ para $\alpha \in \mathbb{C}$.

iii) La función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{Re\, z}$ es continua, verifica la condición (*), y sin embargo no es derivable en ningún punto (ya que no verifica las condiciones de Cauchy-Rieman).

Ejercicio Propuesto 78.
Consideremos la función f definida por

$$f(z) = \log \frac{1+z}{1-z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\}.$$

Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : \mid x \mid \geq 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Prueba también que

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall z \in D(0,1),$$

y aplica este resultado para calcular la suma de las series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1}, \qquad (0 < \theta < \pi).$$

Solución.
Puesto que $\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ y la función

$$\varphi : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$$

definida por

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

es holomorfa, se sigue de la regla de la cadena que f es derivable en el conjunto

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \,:\, \frac{1+z}{1-z} \notin \mathbb{R}_0^- \right\}.$$

Notemos que para $z \neq 1$ se verifica que

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{\mid 1-z \mid^2} = \frac{1+z-\overline{z}-\mid z \mid^2}{\mid 1-z \mid^2} = \frac{1-\mid z \mid^2 + i2Im(z)}{\mid 1-z \mid^2},$$

y por tanto

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}_0^- \quad \Leftrightarrow \quad 1-\mid z \mid^2 + i2Im(z) \in \mathbb{R}_0^- \quad \Leftrightarrow \quad Im(z) = 0 \;\text{ y }\; \mid z \mid \geq 1.$$

En consecuencia,
$$\Omega = \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R} : | x | \geq 1\},$$
y por tanto Ω es un abierto en el que f es holomorfa.

Por las reglas de derivación, para todo $z \in \Omega$ se verifica que
$$f'(z) = \frac{1-z}{1+z} \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z^2}.$$
Teniendo en cuenta el estudio de la serie geométrica, sabemos que
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$
y por tanto
$$f'(z) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}, \qquad \forall z \in D(0,1).$$
Por el Teorema de derivación de la función suma de una serie de potencias podemos afirmar que
$$f(z) = K + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\, z^{2n+1}, \qquad \forall z \in D(0,1)$$
para conveniente constante K. Puesto que $K = f(0) = 0$, podemos concluir que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\, z^{2n+1}, \qquad \forall z \in D(0,1).$$
(Este es el desarrollo de Taylor de f centrado en 0.)

Nótese que la sucesión de coeficientes de dicha serie viene dada por
$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{si} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$
y por tanto
$$\sqrt[n]{| c_n |} = \begin{cases} \sqrt[2k+1]{\frac{2}{2k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$
Como quiera que la sucesión de números reales positivos dada por $a_n = \frac{2}{2n+1}$ verifica que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3} \longrightarrow 1$$

se sigue por el Criterio de la Raíz que

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1.$$

Luego

$$\sqrt[2n+1]{a_n} = a_n^{\frac{1}{2n+1}} = (\sqrt[n]{a_n})^{\frac{n}{2n+1}} \longrightarrow 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

De aquí se desprende que 0 y 1 son los únicos valores adherentes de la sucesión $\{\sqrt[n]{|\, c_n\,|}\}$, y por tanto

$$\limsup \sqrt[n]{|\, c_n\,|} = 1.$$

En consecuencia, el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en 0 es $R = 1$, y por tanto la serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto contenido en $D(0,1)$, y no converge en $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(0,1)$. Para estudiar el comportamiento de la serie en la circunferencia unidad, notemos que

$$f(z) = 2z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\,(z^2)^n, \qquad \forall z\in D(0,1),$$

y que la sucesión $\{\frac{1}{2n+1}\}$ decrece y converge a 0, luego por el Teorema de Picard (Ejercicio Propuesto 49, Pág. 54) (o bien directamente por el Criterio de Dirichlet) se tiene que la serie converge en todos los puntos de la circunferencia unidad salvo eventualmente en los puntos z tales que $z^2 = 1$, esto es, en $z = \pm 1$. Ciertamente, en el caso que nos ocupa, la serie no es convergente ni en 1 ni en -1, ya que la serie numérica de términos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}$ no es convergente (por el Criterio de comparación por paso al límite, comparándola con la armónica de razón 1). Finalmente, por continuidad radial (Teorema 1.45, pág. 50) podemos afirmar que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}\,z^{2n+1}, \qquad \forall z\in C(0,1)\backslash\{-1,1\}.$$

Dado $\theta\in]0,\pi[$, es claro que $e^{i\theta}\in C(0,1)\backslash\{-1,1\}$, y por tanto tenemos que

$$\frac{1}{2}f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{i\theta})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i\theta(2n+1)}}{2n+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1}.$$

Nótese que

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}} = \frac{2\cos\theta/2}{-2i\mathrm{sen}\,\theta/2} = i\,\frac{\cos\theta/2}{\mathrm{sen}\,\theta/2}\,.$$

Puesto que $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, y por tanto $\cos\theta/2 > 0$ y $\mathrm{sen}\,\theta/2 > 0$, se tiene que

$$\frac{\cos\theta/2}{\mathrm{sen}\,\theta/2} > 0.$$

En consecuencia,

$$\left|\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| = \frac{\cos\theta/2}{\mathrm{sen}\,\theta/2} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Luego

$$\frac{1}{2}f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{\cos\theta/2}{\mathrm{sen}\,\theta/2} + i\,\frac{\pi}{4}.$$

Ahora igualando las partes reales y las partes imaginarias en las dos expresiones que hemos obtenido para $\frac{1}{2}f(e^{i\theta})$ se obtiene la parte final del enunciado.

■